Summation der Reihe mit dem Gliede $\frac{p \sin pu}{h^2 + p^2}$.

Von P. du Bois-Reymond in Freiburg i. Br.

Es sei:

$$\frac{\pi}{2} f(u) = \Sigma \frac{p}{h^2 + p^2} \sin pu = \Sigma \sin pu \int_0^\infty e^{-h\varrho} \sin p\varrho \, d\varrho .$$

Durch Zerlegung findet man in bekannter Weise:

$$\int_0^\infty e^{-h\varrho} \sin p\varrho \, d\varrho = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-h\varrho}}{1 - e^{-2\pi h}} \sin p\varrho \, d\varrho ,$$

$$= (-1)^p \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-h(\varrho + \pi)}}{1 - e^{-2\pi h}} \sin p\varrho \, d\varrho .$$

Daher:

$$\frac{\pi}{2} f(u + \pi) = \Sigma \sin pu \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-h(\varrho + \pi)}}{1 - e^{-2\pi h}} \sin p\varrho \, d\varrho ,$$

$$= \Sigma \sin pu \int_0^{\pi} \frac{e^{-h\varrho} - e^{h\varrho}}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}} \sin p\varrho \, d\varrho .$$

Somit ergiebt sich:

$$\int_0^\pi \left(f(\varrho + \pi) - \frac{e^{-h\varrho} - e^{h\varrho}}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}} \right) \sin p\varrho \, d\varrho = 0, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Hieraus folgt nach Hrn. Liouville (Liouv. J. Bd. 1. S. 253), und wenn man noch die Bedingung erfüllt weiss, dass die Function $f(u + \pi)$ im Integrationsintervall ihr Zeichen nicht unendlich oft wechselt:

$$f(\varrho + \pi) = \frac{e^{-h\varrho} - e^{h\varrho}}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}}, \quad 0 \leqq \varrho \leqq \pi .$$

Nun ist $f(\varrho + \pi) = -f(\pi - \varrho) = -f(u)$, wo $\varrho = \pi - u$, daher:

$$f(u) = \frac{e^{h\pi} e^{-hu} - e^{-h\pi} e^{hu}}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}} .$$

Jene Bedingung lässt sich verificiren, wenn man dem Gliede der Reihe die Form $\frac{p^2}{h^2+p^2}\,\frac{\sin pu}{p}$ giebt und darauf den zweiten Mittelwerthsatz anwendet, ausserdem kann man auch rückwärts $f(u)$ wieder in eine Sinusreihe entwickeln.

Es zeigt dies Beispiel, wie man die Fourier'sche Reihe benutzen kann, um, statt zur Function die Entwickelungscoefficienten zu finden, aus den gegebenen Coefficienten die Function herzustellen.

Freiburg i. Br., April 1872.